

2022年陕西省普通高等教育专升本招生考试(样题)
高等数学答案及评分参考

一、单项选择题:本大题共5小题,每小题5分,共25分。

1. B 2. A 3. A 4. C 5. D

二、填空题:本大题共5小题,每小题5分,共25分。

6. $\frac{1}{3}$ 7. $\frac{\sin t}{1 - \cos t}$ 8. 4
9. $e^x + 2\sqrt{e}$ 10. $-\sqrt{3}\pi$

三、计算题:本大题共10小题,每小题8分,共80分。计算题要有计算过程。

11. 解:

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \ln(1+x^2) \sim x^2, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad (4 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} \\ &= 2. \end{aligned} \quad (8 \text{ 分})$$

12. 解:

方程两边对 x 求导,得

$$2x - 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\text{解得 } \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}. \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{则 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{y - x \frac{dy}{dx}}{y^2} = \frac{y - x \cdot \frac{x}{y}}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}. \quad (8 \text{ 分})$$

13. 解:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{d(1 + \ln x)}{(1 + \ln x)^2} \\ &= -\frac{1}{1 + \ln x} + C. \end{aligned} \quad (4 \text{ 分})$$

14. 解:

$$\text{令 } \sqrt{x} = t, \text{ 则 } dx = 2t dt, t \in [0, 1],$$

$$\text{原式} = \int_0^1 \arctan t \cdot 2t dt \quad (2 \text{ 分})$$

$$= t^2 \arctan t \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \frac{\pi}{4} - (t - \arctan t) \Big|_0^1 \quad (6 \text{ 分})$$

$$= \frac{\pi - 2}{2}. \quad (8 \text{ 分})$$

15. 解:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \cdot f'_1 + 2y \ln x, \quad (4 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} &= \cos x \cdot f'_1 + \sin x \cdot (y \cos x \cdot f''_{11} + 2x f''_{12}) + \frac{2y}{x} \\ &= \cos x \cdot f'_1 + y \sin x \cos x \cdot f''_{11} + 2x \sin x \cdot f''_{12} + \frac{2y}{x}. \end{aligned} \quad (8 \text{ 分})$$

16. 解:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - xy,$$

$$\text{grad} f(1, 1, 2) = (-1, 0, 3), \quad (4 \text{ 分})$$

$$\vec{l} = \overrightarrow{PQ} = (2, 1, 2), \text{ 单位向量 } \vec{l}^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(1,1,2)} = -1 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \quad (8 \text{ 分})$$

17. 解:

闭区域 D 为 $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y$, 则

$$I = \int_0^1 dy \int_0^y (e^{y^2} + 3x) dx \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \int_0^1 y e^{y^2} dy + \frac{3}{2} \int_0^1 y^2 dy \quad (6 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{2} e^{y^2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \quad (8 \text{ 分})$$

$$= \frac{e}{2}.$$

18. 解:

$$\text{令 } P = x^2 + y + 2, Q = 2y - 3x, D: x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \frac{\partial Q}{\partial x} = -3, \quad (4 \text{ 分})$$

由格林公式得

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \iint_D (-3-1) dx dy$$

$$= -4 \times 2\pi = -8\pi.$$

19. 解:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \left(\left|\frac{x}{2}\right| < 1\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} x^n \quad (-2 < x < 2).$$

20. 解:

$$\text{对应齐次方程的特征方程为 } r^2 + r - 2 = 0,$$

$$\text{特征根为 } r_1 = -2, r_2 = 1,$$

$$\text{则对应齐次方程的通解为 } Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

$$\text{设原方程的特解形式为 } y^* = ax + b,$$

$$\text{代入原方程得 } a = -2, b = 3,$$

$$\text{即原方程的一个特解为 } y^* = -2x + 3.$$

$$\text{故原方程的通解为 } y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 2x + 3.$$

四、应用题与证明题: 本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分. 应用题的计算要有计算过程, 证明题要有证明过程。

21. 证明:

$$\text{令 } f(t) = \sin t,$$

在 $\left[x, x + \frac{1}{2}\right]$ 上应用拉格朗日中值定理, $\exists \xi \in \left(x, x + \frac{1}{2}\right)$, 使得

$$f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x) = \frac{1}{2} f'(\xi),$$

$$\text{即 } \sin\left(x + \frac{1}{2}\right) - \sin x = \frac{1}{2} \cos \xi,$$

$$\text{因 } |\cos \xi| \leq 1,$$

$$\text{故 } \left| \sin\left(x + \frac{1}{2}\right) - \sin x \right| = \frac{1}{2} |\cos \xi| \leq \frac{1}{2}.$$

22. 解:

曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = x + 2$ 的交点为 $(-1, 1)$ 和 $(2, 4)$,

则平面图形的面积

$$S = \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

(4分)

(6分)

旋转体的体积

$$V = \int_{-1}^2 (\pi(x+2)^2 - \pi x^4) dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{72\pi}{5}.$$

(8分)

(10分)