2019年陕西省普通高等教育专升本招生考试
高等数学试题答案及评分参考

一、单项选择题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

1. C　　2. C　　3. B　　4. A　　5. D

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

6. 1　　7. -1　　8. 2　　9. $\frac{2}{3}$　　10. $\sqrt{2}$

三、计算题：本大题共 10 小题，每小题 8 分，共 80 分。计算题要有计算过程。

11. 解：

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} \qquad (6\ 分)$$

$$= \frac{1}{2}. \qquad (8\ 分)$$

12. 解：

方程两边对 x 求导，得

$e^y y' + y + xy' - e^x = 0$，　　(4 分)

解得　$y' = \dfrac{e^x - y}{e^y + x}$，　　(6 分)

当 $x = 0$ 时，$y = 0$，

所以 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 1$.　　(8 分)

13. 解：

$$原式 = \int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad (2\ 分)$$

$$= \int\arcsin x\,d\arcsin x + \frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2) \qquad (6\ 分)$$

$$= \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + \sqrt{1-x^2} + C. \qquad (8\ 分)$$

14. 解：

令 $\sqrt{x} = t$，则 $x = t^2$，$dx = 2t\,dt$，$t \in [1,2]$，则　　(2 分)

$$原式 = \int_1^2\frac{2t}{t^2+t}dt \qquad (4\ 分)$$

$$= 2\int_1^2 \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t = (2\ln(t+1)\mid_1^2$$ （6 分）

$$= 2(\ln 3 - \ln 2).$$ （8 分）

15. 解：

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2yf_1' + \mathrm{e}^y f_2'.$$ （4 分）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -2yf_{11}'' \cdot 2x + \mathrm{e}^y f_{21}'' \cdot 2x = -4xyf_{11}'' + 2x\mathrm{e}^y f_{21}''.$$ （8 分）

16. 解：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \frac{\partial f}{\partial z} = 6z^2,$$ （2 分）

$$\mathbf{grad} f(1,-1,0) = (2,1,0),$$ （4 分）

$$\vec{l}^0 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}),$$ （6 分）

所以 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,-1,0)} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$ （8 分）

17. 解：

闭区域 D 可表示为 $y^2 \leqslant x \leqslant y, 0 \leqslant y \leqslant 1$，则 （2 分）

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x$$ （4 分）

$$= \int_0^1 \frac{\sin y}{y}(y - y^2)\mathrm{d}y$$ （6 分）

$$= \int_0^1 \sin y \mathrm{d}y + \int_0^1 y \mathrm{d}\cos y$$

$$= -\cos y \mid_0^1 + y\cos y \mid_0^1 - \sin y \mid_0^1$$

$$= 1 - \sin 1.$$ （8 分）

18. 解：

令 $P = -y, Q = x, D: x^2 + y^2 \leqslant 4$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$ （3 分）

由格林公式得

$$I = \iint_D [1 - (-1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ （6 分）

$$= 8\pi.$$ （8 分）

19. 解：

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1，收敛半径\ R = 1,$$

当 $x = \pm 1$ 时，级数发散，故原级数收敛域为 $(-1,1)$. （2 分）

设和函数为 $s(x)$，即 $\quad s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，$x\in(-1,1)$，

逐项积分得

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x \qquad (4\text{ 分})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}\quad(-1<x<1), \qquad (6\text{ 分})$$

求导得 $\quad s(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}\quad(-1<x<1).$ (8 分)

20. 解：

对应齐次方程的特征方程为 $\quad r^2-6r+8=0$， (2 分)

特征根为 $\quad r_1=2,r_2=4$，

则 对应齐次方程的通解为 $\quad Y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$. (4 分)

设原方程的特解形式为 $\quad y^*=ae^{3x}$，

代入原方程得 $\quad a=-1$，

得 原方程的一个特解为 $\quad y^*=-e^{3x}$. (6 分)

故 原方程的通解为 $\quad y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}-e^{3x}$. (8 分)

四、应用题与证明题：本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分。应用题的计算要有计算过程，证明题要有证明过程。

21. 证：

令 $f(x)=e^x-ex$，则 $f(1)=0$，且 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上连续， (2 分)

因为 $f'(x)=e^x-e>0\quad(x>1)$， (5 分)

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调增加， (8 分)

故 当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$，

即 当 $x>1$ 时，$e^x>ex$. (10 分)

22. 解：

$$S=\int_1^e \ln x\mathrm{d}x \qquad (3\text{ 分})$$

$$=x\ln x\big|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1. \qquad (5\text{ 分})$$

$$V=\int_1^e \pi\ln^2 x\mathrm{d}x \qquad (8\text{ 分})$$

$$=\pi\left(x\ln^2 x\big|_1^e-\int_1^e x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\pi\left(e-2\int_1^e \ln x\mathrm{d}x\right)$$

$$=\pi(e-2). \qquad (10\text{ 分})$$