2016年陕西省普通高等教育专升本招生考试
高等数学试题答案及评分参考

一、单项选择题:本大题共5小题,每小题5分,共25分。

1. B　　2. D　　3. A　　4. B　　5. C

二、填空题:本大题共5小题,每小题5分,共25分。

6. 2　　7. 3　　8. 9π

9. $x^y\left(\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\ln x\mathrm{d}y\right)$　　10. 2π

三、计算题:本大题共10小题,每小题8分,共80分。计算题要有计算过程。

11. 解:

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导　所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,

从而有 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1=f(0)=b$,　(4分)

由　$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,

且　$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=1$,　(6分)

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{ax+1-1}{x}=a$,

得　$a=1$.　(8分)

12. 解:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(1-t)'}{\left(\frac{t^2}{2}\right)'}=\frac{-1}{t},$$　(4分)

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{-1}{t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{t^3}.$$　(8分)

13. 解:

由　$f'(x)=3x^2-3=0$　得　驻点 $x_1=-1,x_2=1$,　(2分)

$f''(x)=6x$,

因为　$f''(-1)=-6<0,f''(1)=6>0$,

所以　$x_1=-1$ 为极大值点,$x_2=1$ 为极小值点,　(4分)

又因为 $f''(0)=0$，且当 $x<0$ 时，$f''(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$，

又 $f(0)=1$，所以函数图形的拐点为 $(0,1)$. (8 分)

14. 解：

$$\int \arctan x \mathrm{d}x = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \qquad (r\text{ 分})$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C. \qquad (8\text{ 分})$$

15. 解：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 + y\mathrm{e}^{xy} f'_2, \qquad (4\text{ 分})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11} + y\mathrm{e}^{xy} f''_{12} + y^2 \mathrm{e}^{xy} f'_2 + y\mathrm{e}^{xy} f''_{21} + y^2 \mathrm{e}^{2xy} f''_{22}$$

$$= f''_{11} + 2y\mathrm{e}^{xy} f''_{12} + y^2 \mathrm{e}^{2xy} f''_{22} + y^2 \mathrm{e}^{xy} f'_2. \qquad (8\text{ 分})$$

16. 解：

易见函数 u 在整个 R^3 中可微，因为 $\mathbf{grad}u = (y^2 z^2, 2xyz^2, 2xy^2 z)$， (3 分)

所以 $\mathbf{grad}u\Big|_{(1,1,1)} = (1,2,2)$， (5 分)

函数在点 $(1,1,1)$ 沿梯度方向的方向导数为该点处梯度的模：

$$\left|\mathbf{grad}u\Big|_{(1,1,1)}\right| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3. \qquad (8\text{ 分})$$

17. 解：

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^4 \sin^2\theta\cos\theta \mathrm{d}r \qquad (4\text{ 分})$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \mathrm{d}\sin\theta \int_0^1 r^4 \mathrm{d}r = \frac{1}{15}. \qquad (8\text{ 分})$$

18. 解：

$$I = \int_{\overline{OA}} (x^2+y)\mathrm{d}x + (x+\sqrt{y})\mathrm{d}y + \int_{\overline{AB}} (x^2+y)\mathrm{d}x + (x+\sqrt{y})\mathrm{d}y \qquad (3\text{ 分})$$

$$= \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 (1+\sqrt{y})\mathrm{d}y \qquad (6\text{ 分})$$

$$= \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 + \left(y + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1 = 2. \qquad (8\text{ 分})$$

19. 解：

$$f(x) = \frac{x}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}} \qquad (4\text{ 分})$$

$$= \frac{x}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n \quad \left(\left|-\frac{x}{3}\right|<1\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} x^n \quad (|x| < 3).$$ (8 分)

20. 解：

对应齐次方程的特征方程为 $r^2 - 4r + 4 = 0$，

特征根为 $r_1 = 2, r_2 = 2$，

对应齐次方程的通解为 $Y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$， (2 分)

设原方程特解形式为 $y^* = (ax + b)e^x$， (4 分)

代入原方程得 $a = 1, b = 3$，

得 原方程的一个特解为 $y^* = (x + 3)e^x$， (6 分)

故 原方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + (x + 3)e^x$. (8 分)

四、应用题与证明题：本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分。应用题的计算要有计算过程，证明题要有证明过程。

21. 证明：

设 $f(x) = x^n$， (4 分)

显然 $f(x)$ 在闭区间 $[b,a]$ 上连续，在开区间 (b,a) 内可导，

由拉格朗日中值定理得，

在 (b,a) 内至少存在一点 ξ，

使得 $f(a) - f(b) = f'(\xi)(a - b)$，

即 $a^n - b^n = n\xi^{n-1}(a - b)$， (8 分)

因为 $b^{n-1} < \xi^{n-1} < a^{n-1}$，

所以 $nb^{n-1}(a - b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a - b)$. (10 分)

22. 解：

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\mathrm{d}x$$ (3 分)

$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$ (5 分)

$$V = \int_0^1 [\pi(\sqrt{x})^2 - \pi(x^2)^2]\mathrm{d}x$$ (8 分)

$$= \pi\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{10}\pi.$$ (10 分)