2015年陕西省普通高等教育专升本招生考试(样题)
高等数学答案及评分参考

一、选择题:本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分。

1. B　　2. B　　3. D　　4. C　　5. A

二、填空题:本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分。

6. 5　　7. 4　　8. $\dfrac{-2yz}{e^z+2xy}$

9. $\dfrac{1}{2}\ln^2 f(x)+C$　　10. $\dfrac{1}{8}$

三、计算题:本大题共 10 小题,每小题 8 分,共 80 分。计算题要有计算过程。

11. 解:

$$原式=\lim_{x\to0}\left\{\left[1+\frac{\sin x-x}{x}\right]^{\frac{x}{\sin x-x}}\right\}^{\frac{\sin x-x}{x}\cdot\frac{1}{1-\cos x}} \qquad (2分)$$

$$其中\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{1}=0 \qquad (4分)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x}\cdot\frac{1}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\cdot\frac{1}{2}x^2}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{3} \qquad (6分)$$

所以,原式 $=e^{-\frac{1}{3}}$　　(8分)

12. 解:

$$\because \frac{dy}{dt}=(2+t)te^t \qquad \frac{dx}{dt}=6t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(2+t)te^t}{6t}=\frac{1}{6}(2+t)e^t \qquad (4分)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{6}(3+t)e^t}{6t}=\frac{(3+t)e^t}{36t} \qquad (8分)$$

13. 解：

$$I=\int \arctan e^{x}\, de^{x} = e^{x}\arctan e^{x}-\int e^{x}\, d\arctan e^{x} \qquad (2\text{ 分})$$

$$= e^{x}\arctan e^{x}-\int \frac{e^{x}e^{x}}{1+e^{2x}}dx \qquad (4\text{ 分})$$

$$= e^{x}\arctan e^{x}-\frac{1}{2}\int \frac{d(1+e^{2x})}{1+e^{2x}} \qquad (6\text{ 分})$$

$$= e^{x}\arctan e^{x}-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C \qquad (8\text{ 分})$$

14. 解：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^{3} x}\,dx$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^{3} x}\,dx \qquad (2\text{ 分})$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\,|\sin x|\,dx \qquad (4\text{ 分})$$

$$=-2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\,d\cos x \qquad (6\text{ 分})$$

$$=-2\cdot\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3} \qquad (8\text{ 分})$$

15. 解：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^{3}\left[xf_{1}'+\frac{1}{x}f_{2}'\right]=x^{4}f_{1}'+x^{2}f_{2}' \qquad (2\text{ 分})$$

$$\frac{\partial^{2} z}{\partial y^{2}}=x^{4}\left[xf_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}''\right]+x^{2}\left[xf_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}''\right]$$

$$=x^{5}f_{11}''+2x^{3}f_{12}''+xf_{22}'' \qquad (4\text{ 分})$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^{2}f+x^{3}\left[yf_{1}'-\frac{y}{x^{2}}f_{2}'\right]=3x^{2}f+x^{3}yf_{1}'-xyf_{2}' \qquad (6\text{ 分})$$

$$\frac{\partial^{2} z}{\partial x\partial y}=3x^{2}\left[xf_{1}'+\frac{1}{x}f_{2}'\right]+x^{3}f_{1}'+x^{3}y\left[xf_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}''\right]-xf_{2}'-xy\left[xf_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}''\right]$$

$$=4x^{3}f_{1}'+2xf_{2}'+x^{4}yf_{11}''+yf_{22}'' \qquad (8\text{ 分})$$

16. 解：

易见函数 $f(x,y,z)$ 在整个 $\mathbb{R}^{3}$ 中可微，

$$\mathbf{grad}f=(2xyz,x^{2}z,x^{2}y) \qquad (3\text{ 分})$$

带入点 $(1,-1,2)$ 得：

$\mathbf{grad} f(1,-1,2)=(-4,2,-1)$ (5 分)

$(1,-1,2)$ 点沿梯度方向的方向导数即该点处梯度的模：

$|\mathbf{grad} f(1,-1,2)|=\sqrt{21}.$ (8 分)

17. 解：

$$\int_0^1 dx\int_0^x (x^2+y^2)dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\sec\theta} r^3 dr \quad (3\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^4\theta d\theta \quad (5\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2\theta)\sec^2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{3} \quad (8\text{ 分})$$

18. 解：$P=1+xe^{2y}, Q=x^2e^{2y}+\sin y^2$,

而 $\frac{\partial P}{\partial y}=2xe^{2y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在整个 xOy 平面上连续，

则积分在整个 xOy 平面上与路径无关， (4 分)

故取 $L_1:(4,0)$ 到 $(0,0)$ 的直线段，从而

$$I=\int_L P dx+Q dy=\int_{L_1} P dx+Q dy=\int_4^0(1+x)dx=-12. \quad (8\text{ 分})$$

19. 解：由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right|=1$ 得，收敛半径 $R=1$.

在 $x=-1$ 处，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛，在 $x=1$ 处，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，

因此收敛域为 $[-1,1)$ (2 分)

设和函数为 $S(x)$，即 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}(-1\leqslant x<1)$

于是 $xS(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ (4 分)

所以 $[xS(x)]'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, (6 分)

从而 $xS(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)\quad(-1\leqslant x<1)$

于是，当 $x\neq 0$ 时，有 $S(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$，而 $S(0)=1$，故

$$S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0]\cup(0,1)\\ 1, & x=0\end{cases} \quad (8\text{ 分})$$

20. 解：对应齐次方程的特征方程为 $r^2-6r+8=0$，特征根为 $r_1=2, r_2=4$

原方程对应的齐次方程的通解为：$C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$，（2 分）

原方程的特解形式为：$y^*=x(ax+b)e^{4x}$，（4 分）

带入原方程得 $a=\frac{1}{4}, b=-\frac{3}{4}$ 即原方程的一个特解为 $y^*=x\left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\right)e^{4x}$，

（6 分）

从而原方程通解为：$y=x\left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\right)e^{4x}+C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$.（8 分）

四、证明题和应用题：本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分。计算题要有计算过程，证明题要有证明过程。

21. 证明：

由 $f(x)$ 在$[-1,1]$上可导及 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=c\neq 0$ 可知

$f(0)=0$（4 分）

令 $F(x)=f(x)-x$，（6 分）

则 $F(0)=f(0)-0=0=f(1)-1=F(1)$，（8 分）

可知 $F(x)$ 在闭区间$[0,1]$上满足罗尔定理条件，由罗尔定理知

在$(0,1)$内至少存在一点 ξ，使 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=1$.（10 分）

22. 解：

设切点坐标为(x_0,y_0)，则切线方程为 $y=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x_0}x$，（3 分）

$$\begin{cases} y_0=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x_0}x_0 \\ y_0=e^{\frac{1}{2}x_0} \end{cases} \Rightarrow x_0=2, y_0=e$$（4 分）

$$A=\int_0^2 e^{\frac{1}{2}x}dx-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot e=e-2$$（7 分）

$$V=\int_0^2\pi(e^{\frac{1}{2}x})^2dx-\int_0^2\pi\left(\frac{e}{2}x\right)^2dx=\pi\left(e^x+\frac{e^2}{12}x^3\right)\Big|_0^2=\left(\frac{e^2}{3}-1\right)\pi$$

（10 分）