# 2014年陕西省普通高等教育专升本招生考试
# 高等数学试题答案及评分参考

## 一、单项选择题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

1. A　　2. D　　3. D　　4. C　　5. B

## 二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

6. $\dfrac{3}{2}$　　7. $\dfrac{4}{e^2}$　　8. $\dfrac{(1+\ln x)^{2014}}{2014}+C$

9. $3x+2y+z-10=0$　　10. $e^x+e^{-y}=C$

## 三、计算题：本大题共 10 小题，每小题 8 分，共 80 分。计算题要有计算过程。

11. 解：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} x\sin x\,dx}{x^6} \qquad (4\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x^2\cdot 2x}{6x^5} \qquad (6\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{3} \qquad (8\text{ 分})$$

12. 解：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=2t \qquad (4\text{ 分})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\cdot\frac{1}{\frac{1}{1+t^2}}=2(1+t^2) \qquad (8\text{ 分})$$

13. 解：

$$\text{原式}=\int(\ln x-1)d\left(-\frac{1}{x}\right) \qquad (4\text{ 分})$$

$$=-\frac{1}{x}(\ln x-1)-\int\frac{-1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx \qquad (6\text{ 分})$$

$$=-\frac{\ln x}{x}+C \qquad (8\text{ 分})$$

14. 解：

$$I=\int_0^2\sqrt{(x-1)^2}\,dx$$

$$= \int_0^2 |x-1| \, dx \tag{4 分}$$

$$= \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx \tag{6 分}$$

$$= 1 \tag{8 分}$$

15. 解：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y f_1' + f_2' \tag{4 分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1' + y(x f_{11}'' + 2y f_{12}'') + x f_{21}'' + 2y f_{22}''$$

$$= f_1' + xy f_{11}'' + (x + 2y^2) f_{12}'' + 2y f_{22}'' \tag{8 分}$$

16. 解：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z, \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz, \frac{\partial u}{\partial z} = xy^2 \tag{3 分}$$

$$\mathbf{grad} u(1,-1,1) = (1,-2,1) \tag{6 分}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,-1,1)} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \tag{8 分}$$

17. 解：

$$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^1 dx \int_0^x e^{\frac{x^2}{2}} dy \tag{4 分}$$

$$= \int_0^1 e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x dx \tag{6 分}$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} \Big|_0^1 = \sqrt{e} - 1 \tag{8 分}$$

18. 解：

$P = y + 2, Q = 2x$,

作直线段 $\overline{BA}: y = 0, x: -1 \to 1$ （2 分）

由格林公式得：

$$I = \oint_{L+\overline{BA}} (y+2)dx + 2xdy - \int_{\overline{BA}} (y+2)dx + 2xdy \tag{4 分}$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy - \int_{-1}^1 2dx \tag{6 分}$$

$$= \iint_D dxdy - 4 = \frac{\pi}{2} - 4 \tag{8 分}$$

19. 解：

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n \cdot n} \right| = 2$$

当 $x = -2$ 时，原级数收敛；当 $x = 2$ 时，原级数发散

原级数收敛域为 $[-2,2)$ （4 分）

令 $t=\frac{x}{2}$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n=S(t)$

因为 $S'(t)=1+t+t^2+\cdots=\frac{1}{1-t}\quad t\in(-1,1)$

所以 $S(t)=\int_0^t S'(t)\mathrm{d}t+S(0)=\int_0^t\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-t)\quad t\in[-1,1)$

(6 分)

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n}=-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)=\ln2-\ln(2-x)\quad x\in[-2,2)$ (8 分)

20. 解：

对应齐次方程的特征方程为

$r^2+r-2=0$

特征根为 $r_1=-2,r_2=1$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{x}$ (2 分)

设原方程的特解为 $y^*=Ax\mathrm{e}^{-2x}$ (4 分)

代入原方程得 $A=-\frac{1}{3}$ (6 分)

即原方程的一个特解为 $y^*=-\frac{1}{3}x\mathrm{e}^{-2x}$

从而原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{3}x\mathrm{e}^{-2x}$ (8 分)

**四、应用题与证明题：本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分。应用题的计算要有计算过程，证明题要有证明过程。**

21. 证明：

由已知，根据零点定理，在 $(0,1)$ 内存在一点 $\eta$，使得

$f(\eta)=0$ (3 分)

令 $F(x)=x^2f(x)$ (6 分)

由已知，$F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上满足罗尔定理条件，由罗尔定理得

至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$

使得 $F'(\xi)=0$ (8 分)

即 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$ (10 分)

22. 解：

设切点为 $(x_0,x_0^2)$，则切线方程为 $y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$

即 $y=2x_0x-x_0^2$ (2 分)

$y = 0$ 时，$x = \frac{1}{2}x_0$

$x = 1$ 时，$y = 2x_0 - x_0^2$ （4 分）

$$S(x_0) = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{x_0}{2}\right)(2x_0 - x_0^2)\right]$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x_0\,(2 - x_0)^2 \quad 0 \leqslant x_0 \leqslant 1$$ （6 分）

由 $S'(x_0) = \frac{1}{4}(2 - x_0)(3x_0 - 2) = 0$

得　区间内的唯一驻点 $x_0 = \frac{2}{3}$ （8 分）

因为 $S''(\frac{2}{3}) = 1 > 0$

故　所求切线方程为 $y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{9}$ （10 分）