2013 年陕西省普通高等教育专升本招生考试
高等数学试题答案及评分参考

一、单项选择题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

1. C　　2. A　　3. D　　4. B　　5. D

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

6. $\dfrac{x}{1+2x}$　　7. 2　　8. e^{-1}　　9. $\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx$

10. $\sqrt{2}$

三、计算题：本大题共 10 小题，每小题 8 分，共 80 分。计算题要有计算过程。

11. 解：

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\frac{1}{2}x^2 \cdot x^2} \quad (4\text{ 分})$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2} - 2x}{2x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2-1}}{x^2} \quad (6\text{ 分})$$

$$= 1 \quad (8\text{ 分})$$

12. 解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t \quad (4\text{ 分})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b}{a}\frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{1}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2}\frac{1}{\sin^3 t} \quad (8\text{ 分})$$

13. 解：

$$\text{原式} = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx \quad (4\text{ 分})$$

$$= \int dx - \int \frac{d(1+e^x)}{1+e^x} \quad (6\text{ 分})$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C \quad (8\text{ 分})$$

14. 解：

$$I = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} |\sin x| \cdot |\cos x| \, dx \qquad (3 分)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cos x dx \qquad (6 分)$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin^2 x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= 1 \qquad (8 分)$$

15. 解：

因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xyf'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xf'\left(\frac{x}{y}\right)$ (3 分)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xf\left(\frac{x}{y}\right) + xyf'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{-x}{y^2} = xf\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right) \qquad (6 分)$$

所以 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$ (8 分)

16. 解：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - yz, \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - xz, \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 - xy \qquad (2 分)$$

$$\mathbf{grad} f(-1,1,2) = (-1,0,13) \qquad (4 分)$$

$$\mathrm{e}_l = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \qquad (6 分)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\bigg|_{(-1,1,2)} = (-1)\cdot\frac{-1}{\sqrt{3}} + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 13\cdot\frac{-1}{\sqrt{3}} = -4\sqrt{3} \qquad (8 分)$$

17. 解：

$$I = \iint_D xy \, dx dy + \iint_D \mathrm{e}^{1+x^2+y^2} \, dx dy \qquad (2 分)$$

$$= 0 + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \mathrm{e}^{1+r^2} r dr \qquad (4 分)$$

$$= \pi \int_0^1 e^{1+r^2} d(1+r^2) \qquad (6 分)$$

$$= \pi(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}) \qquad (8 分)$$

18. 解：

令 $P(x,y) = x + y - 1, Q(x,y) = x - y + 1$

因为 $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$，所以积分与路径无关 (2 分)

引入点 $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$，则

$$I=\int_{\overrightarrow{OB}}(x+y-1)\mathrm{d}x+(x-y+1)\mathrm{d}y+\int_{\overrightarrow{BA}}(x+y-1)\mathrm{d}x+(x-y+1)\mathrm{d}y$$

(4 分)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\mathrm{d}x+\int_0^1\left(\frac{\pi}{2}-y+1\right)\mathrm{d}y \qquad (6\text{ 分})$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2} \qquad (8\text{ 分})$$

19. 解：

显然幂级数的收敛半径 $R=1$

幂级数在 $x=1$ 点处发散，在 $x=-1$ 点处收敛，所以收敛域为 $[-1,1)$

(2 分)

$$令\ S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n \quad x\in[-1,1)$$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x} \quad x\in(-1,1) \qquad (4\text{ 分})$$

$$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x+S(0)=-\ln(1-x) \quad x\in[-1,1) \qquad (6\text{ 分})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2 \qquad (8\text{ 分})$$

20. 解：

特征方程 $r^2-4=0$，特征根 $r_{1,2}=\pm 2$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$ (2 分)

设方程 $y''-4y=4\mathrm{e}^{2x}$ 的一个特解为 $y_1^*=ax\mathrm{e}^{2x}$ (4 分)

代入方程 $y''-4y=4\mathrm{e}^{2x}$ 得 $y_1^*=x\mathrm{e}^{2x}$ (6 分)

显然方程 $y''-4y=1$ 的一个特解为 $y_2^*=-\frac{1}{4}$ (7 分)

故 原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{4}$ (8 分)

四、应用题与证明题：本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分。应用题的计算要有计算过程，证明题要有证明过程。

21. 证明：

因为 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，$\left[\frac{1}{2},1\right]\subset[0,1]$，所以存在 $\eta\in\left[\frac{1}{2},1\right]$

使得 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x=f(\eta)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}f(\eta)$

由已知条件得　$f(0)=f(\eta)=0$ （3分）

设 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$ （6分）

易证 $F(x)$ 在闭区间 $[0,\eta]$ 上满足 Rolle 定理条件 （8分）

由 Rolle 定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$

使得　$F'(\xi)=-\mathrm{e}^{-\xi}f(\xi)+\mathrm{e}^{-\xi}f'(\xi)=0$

即　$f'(\xi)-f(\xi)=0$ （10分）

22. 解：

(1) 因为 $y'=2x$

所以在点(1,1)处的切线方程为　$y=2x-1$ （2分）

(2) $S=\int_0^1\left[\frac{1}{2}(y+1)-\sqrt{y}\right]\mathrm{d}y$ （4分）

$=\frac{1}{12}$ （6分）

(3) $V=\int_0^1\pi(x^2)^2\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^1\pi(2x-1)^2\,\mathrm{d}x$ （8分）

$=\frac{\pi}{30}$ （10分）