2021年陕西省普通高等教育专升本招生考试
高等数学试题答案及评分参考

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题5分，共25分。

1. A　　2. D　　3. A　　4. B　　5. C

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分。

6. 2　　7. -4　　8. $-e^2$　　9. $y=\frac{1}{x}$　　10. $2\pi\ln 2$

三、计算题：本大题共10小题，每小题8分，共80分。计算题要有计算过程。

11. 解：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2\sin 2t}{\cos t}=-4\sin t.$$ （4分）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-4\cos t\cdot\frac{1}{\cos t}=-4.$$ （8分）

12. 解：

$$原式=\int \ln x\, d(x^2)$$ （2分）

$$=x^2\ln x-\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx$$ （6分）

$$=x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2+c.$$ （8分）

13. 解：

当 $x\to 0$ 时，$e^{x^2}-1\sim x^2$， （2分）

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)\cdot 2x}{4x^3}$$ （6分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot 2x}{4x^3}=\frac{1}{2}.$$ （8分）

14. 解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x^2+y^2}\cdot 2x=2xe^{x^2+y^2}.$$ （4分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\cdot e^{x^2+y^2}\cdot 2y=4xye^{x^2+y^2}.$$ （8分）

15. 解：

$$I=\int_1^2(2-x)dx+\int_2^3(x-2)dx$$ （4分）

$$= \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_2^3$$

$$= 1.$$
(6 分)

16. 解：
(8 分)

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}}$$
(4 分)

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n \quad \left(\left|\frac{x}{3}\right| < 1\right)$$
(6 分)

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}x^n \quad (-3 < x < 3).$$
(8 分)

17. 解：

对应齐次方程的特征方程为 $r^2 + 4r + 4 = 0$，

特征根为 $r_{1,2} = -2$，
(2 分)

则 对应齐次方程的通解为 $Y = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$.
(4 分)

设原方程的特解形式为 $y^* = ae^{-x}$，

代入原方程得 $a = 1$，

得 原方程的一个特解为 $y^* = e^{-x}$.
(6 分)

故 原方程的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + e^{-x}$.
(8 分)

18. 解：

梯度 $\mathbf{grad}f(-1,1,1) = (2x + y, x + 2y, 2z - 2)\Big|_{(-1,1,1)} = (-1,1,0)$.
(4 分)

$\vec{l} = \overrightarrow{PQ} = (2,1,2)$，$\vec{l}^{\circ} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
(5 分)

所以 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(-1,1,1)} = (-1) \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.
(8 分)

19. 解：
(2 分)

闭区域 D 可表示为：$0 \leqslant x \leqslant 3, -x \leqslant y \leqslant x$，
(4 分)

$$I = \iint_D x\,dxdy + \iint_D y^3\,dxdy$$
(6 分)

$$= \int_0^3 dx \int_{-x}^{x} x\,dy + 0$$
(8 分)

$$= 2\int_0^3 x^2\,dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^3 = 18.$$

20. 解：

令 $P(x,y) = x\sin 2x - 2y$，$Q(x,y) = 3x + y\cos 2y$，$D: |x| + |y| \leqslant 1$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=3,\frac{\partial P}{\partial y}=-2.$$ (4 分)

由格林公式得

$$I=\iint\limits_{D}(3-(-2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ (6 分)

$$=5\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=5\cdot(\sqrt{2})^2=10.$$ (8 分)

四、应用题与证明题：本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分。应用题的计算要有计算过程，证明题要有证明过程。

21. 解：

平面图形的面积

$$S=\int_0^2\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x$$ (3 分)

$$=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^2=\frac{4}{3}.$$ (5 分)

旋转体的体积

$$V=\pi\int_0^2\frac{1}{4}x^4\mathrm{d}x$$ (8 分)

$$=\pi\frac{1}{20}x^5\Big|_0^2=\frac{8\pi}{5}.$$ (10 分)

22. 证明：

令 $f(x)=\mathrm{e}^x$， (2 分)

则 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，由拉格朗日中值定理得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),a<\xi<b.$$ (4 分)

即 $\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^{\xi}(b-a).$ (6 分)

又由 $a<\xi<b$ 时，有

$$\mathrm{e}^a<\mathrm{e}^{\xi}<\mathrm{e}^b.$$ (8 分)

从而

$$\mathrm{e}^a(b-a)<\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a<\mathrm{e}^b(b-a).$$ (10 分)